14 Mars 2025 *Masson Vincent*

Série 4

Exercice 1: Analyse dimensionnelle

Une méthode très importante en physique est l'analyse dimensionnelle. Les lois de la physique s'expriment sous forme d'équation du type :

$$Membre\ de\ gauche\ =\ Membre\ de\ droite$$

Une telle égalité implique que :

— Les deux membres sont de même nature c'est-à-dire qu'ils sont tous deux soit des scalaires, soit des vecteurs, soit des tenseurs de même ordre.

— Leurs dimensions sont identiques.

Assurez-vous que la formule $\vec{f} = -\vec{\nabla} p$ vérifie ces deux conditions, avec $\vec{f}$ une densité volumique de force.

Exercice 2: Théorème de la Divergence

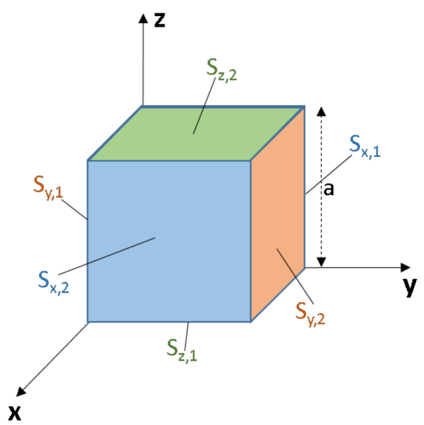
(a) Soit un champ vectoriel $\vec{u}$ stationnaire définit dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé O_{xyz}. Ce champ vectoriel est défini tel que $\vec{u}(\vec{r}) = (u_x, u_y, u_z)$ avec $(u_x, u_y, u_z) = (1, 0, 0)$, $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dessinez le champ vectoriel dans le plan $z = 0$. Que vaut la divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$?

(b) Soit un cube d'arête a, surface S et volume V. Deux sommets sont en $(0, 0, 0)$ et $(a, 0, 0)$. Calculez

$$\oiint_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

et vérifiez que le résultat est équivalent à

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dV$$



(c) Refaites le calcul de $\oiint_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$ pour $\vec{u} = (x, 0, 0)$ et vérifiez que le résultat est équivalent à

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dV$$

Exercice 3: Champ de Vitesse

Nous considérons l'écoulement d'un fluide parfait et incompressible ($\rho = \rho_0 = constante$) avec le champ de vitesse suivant :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = -\omega y \vec{e}_x + \omega x \vec{e}_y$$

ω est une constante positive qui s'exprime en s^{-1}.

(a) Indiquez, dans le plan xy, le vecteur $\vec{u}$ aux points suivants :

$$\begin{array}{llll} (x,y) = (1,0); & (x,y) = (2,0); & (x,y) = (0,1); & (x,y) = (0,2); \\ (x,y) = (-1,0); & (x,y) = (-2,0); & (x,y) = (0,-1); & (x,y) = (0,-2); \end{array}$$

Pour les besoins du dessin, supposez $\omega = 1$.

(b) Que pouvez-vous dire sur la valeur de $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$?

(c) Déterminez l'accélération d'un élément fluide en un point (x, y) arbitraire.

(d) Démontrez que ce champ de vitesse satisfait l'équation de continuité.

(e) Utilisez l'équation d'Euler pour déterminer l'expression du champ scalaire de pression $p(\vec{r}, t)$. Négligez la force de gravité dans l'équation d'Euler et supposez que $p = p_0$ en $\vec{r} = \vec{0}$.

Exercice 4: Lignes de courant et trajectoires des éléments fluides

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible dont le champ de vitesse dépend de la position $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et du temps t selon l'expression suivante :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = u_0 \vec{e}_x + u_0 \sin(x - u_0 t) \vec{e}_y$$

où u_0 est une constante positive.

(a) Indiquer, dans le plan xy, en faisant un dessin, le vecteur $\vec{u}$ à $t = 0$ et aux points suivants :

$$\begin{array}{llll} (x,y) = (0,0) & (x,y) = (\pi/2,0) & (x,y) = (\pi,0) & (x,y) = (3\pi/2,0) \\ (x,y) = (0,1) & (x,y) = (\pi/2,1) & (x,y) = (\pi,1) & (x,y) = (3\pi/2,1) \\ (x,y) = (0,2) & (x,y) = (\pi/2,2) & (x,y) = (\pi,2) & (x,y) = (3\pi/2,2) \end{array}$$

Ensuite, à partir de votre dessin, deviner la forme de la ligne de courant passant par le point $(x, y) = (0, 0)$ et l'ajouter au dessin.

(b) Refaire les mêmes étapes que dans la partie a), mais pour le temps $t = \pi/(2u_0)$.

(c) Démontrez que les trajectoires des éléments fluides sont données par

$$\vec{r}_f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 t + x_0 \\ u_0 \sin(x_0) t + y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

où (x_0, y_0, z_0) est la position de l'élément fluide à $t = 0$.

<u>Indication :</u> il suffit de montrer que le $\vec{r}_f(t)$ donné satisfait l'équation

$$\frac{d\vec{r}_f}{dt} = \vec{u}(\vec{r}_f(t), t)$$

(d) Quelle est la forme des trajectoires $\vec{r}_f(t)$? Est-ce que les lignes de courant et la trajectoire des éléments fluides sont identiques pour cet écoulement ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5: Dérivation de l'équation de continuité (description Lagrangienne)

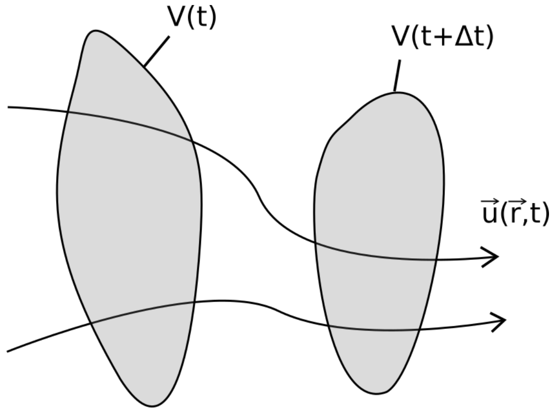
(a) Soit $f(\vec{r},t)$ un champ scalaire et $V(t)$ un volume qui se déplace avec le champ vectoriel de vitesse $\vec{u}(r,t)$. A partir de la règle de Leibniz, donnée ci-dessous :

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{V(t)} f dV = \iiint\limits_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oiint\limits_{S(t)} f\vec{u}\cdot d\vec{S}$$

avec $S(t)$ la surface entourant le volume $V(t)$, démontrez la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{V(t)} f dV = \iiint\limits_{V(t)} \left(\frac{D}{Dt}f + f(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\right) dV$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})$ dans l'intégrale du membre de droite est la dérivée convective.



(b) Dans le cours, on a dérivé l'équation de continuité $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0$ en appliquant le principe de la conservation de masse à un volume V <u>fixé</u> dans le temps (description Eulérienne) et en l'absence de toute source/perte.

Dérivez l'équation de continuité en considérant un volume $V(t)$ <u>qui se déplace avec l'écoulement</u> (description Lagrangienne).